Compito del 7 - 6 - 2016

1. Dato il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+\alpha \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

trovare le soluzioni al variare del parametro α.
Scrivere un programma in Matlab che calcoli e stampi la somma dei numeri pari da 2 a 32, estremi compresi.

Il determinante della matrice è pari a $2 - 2\alpha$. Se α è diverso da 1 allora esiste un'unica soluzione data da $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0)$. Se invece α è uguale ad 1 esistono infinite soluzioni: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0) + \gamma(1, -8, -2)$, con γ arbitrario (si noti che $(1, -8, -2)$ è un autovettore corrispondente all'autovalore nullo).
Per il calcolo della somma si può scrivere ad esempio:

```
somma=0;
  for k=1:16
     somma=somma+2*k;
  end
somma
```

2. Sia $\vec{\gamma}$ la curva ottenuta come unione dei seguenti tratti:

$$(1-t, t) \;\; t \in [0,1] \qquad (1-t, 2-t) \;\; t \in [1,2] \qquad (t-3, 0) \;\; t \in [2,4]$$

Calcolare la lunghezza di $\vec{\gamma}$. Calcolare il lavoro lungo $\vec{\gamma}$ nei casi in cui il campo vettoriale sia $\vec{F}(x,y) = (2x, 2y)$ oppure $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$.

La curva $\vec{\gamma}$ è chiusa e composta da 3 segmenti rettilinei, formanti un triangolo. La lunghezza di $\vec{\gamma}$ è pari a $2 + 2\sqrt{2}$.
Il primo campo è conservativo per cui il lavoro risulta essere nullo. Il secondo campo non è conservativo. Il lavoro corrispondente equivale a 2.

3. Per $t > 0$, calcolare la soluzione dell'equazione differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 [y(t)]^4 \\ \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Separando le variabili ed integrando rispetto a t, si ricava:

$$-\frac{1}{3[y(t)]^3} = \frac{t^3}{3} + c$$

dove c è una costante arbitraria. La condizione $y(1) = -1$ impone $c = 0$. Pertanto si ha: $y(t) = -1/t$.

4. Data la funzione $f(x, y) = 1/(1 - y^2)$ ed il dominio:

$$D = \{y^2 - 1 \leq x \leq 1 - y^4,\ 0 \leq y \leq 1, \}$$

calcolare $I = \int_D f dxdy$.

Si ha:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{1 - y^2} \int_{y^2-1}^{1-y^4} dx \right) dy = \int_0^1 (2 + y^2) dy = \frac{7}{3}.$$