Compito del 7 - 9 - 2020

1. Sia definita $f : A =]-1, 1] \to B$ in modo che:

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{se } x \in]-1, 0[; \qquad f(x) = 1 \quad \text{se } x \in [0, 1]$$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare B in modo che f sia suriettiva. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è invertibile.

Si ha: $\sup(f) = \max(f) = 1$ e $\inf(f) = 0$. Il minimo non esiste. La funzione è continua e derivabile su tutto A. La funzione è suriettiva se $B =]0, 1]$. La funzione non è invertibile, non essendo essa iniettiva.

2. Sull'intervallo $A =]-2\pi, 2\pi[$, disegnare il grafico della funzione $f : A \to \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = 1 - 2\cos^2 x$$

Determinare l'immagine B di f. Dire se la nuova funzione $f : A \to B$ risulta essere invertibile.

La funzione ammette l'espressione alternativa: $f(x) = -\cos 2x$. Il suo studio a questo punto è semplice. La f ammette come zeri i punti $\pm\frac{1}{4}\pi, \pm\frac{3}{4}\pi, \pm\frac{5}{4}\pi, \pm\frac{7}{4}\pi$, assume minimo relativo in corrispondenza dei punti $0, \pm\pi$, e massimo relativo in corrispondenza dei punti $\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi$. Ha inoltre flessi in tutti i punti in cui si annulla. L'immagine corrisponde all'intervallo $[-1, 1]$. La funzione non è invertibile.

3. Rappresentare analiticamente la funzione integrale:

$$G(t) = \int_{-1}^{t} f(x)dx \qquad t \in]-1, 1]$$

dove f è definita nell'esercizio **1**. Calcolare poi il limite $\lim_{n\to\infty} G(\frac{1}{n})$.

Per $-1 < t \leq 0$, si ha:

$$G(t) = \int_{-1}^{t} (1 - x^2)dx = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{3}$$

e dunque $G(0) = \frac{2}{3}$. Per $0 \leq t \leq 1$, si ha:

$$G(t) = G(0) + \int_0^t dx = \tfrac{2}{3} + t$$

per cui: $G(\frac{1}{n}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{n}$.
Infine si ricava: $\lim_{n\to\infty} G(\frac{1}{n}) = \frac{2}{3}$

4. Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Si calcolino A^2 e A^4, e, mediante eliminazione Gaussiana, si risolva il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$, dove $\vec{b} = (0, 2, \sqrt{2})$.

Si ha:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema in forma triangolare diviene:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dal quale si ricava: $\vec{x} = (1, 2, 1)$.