Compito del   8 - 1 - 2013

1. Sia data la matrice: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcolare i suoi autovalori, i corrispondenti autovettori, la sua fattorizzazione LU, il suo determinante e la sua inversa. Risolvere infine il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$, dove $\vec{b} = (1, 0)$.

Autovalori e autovettori:
$\lambda_1 = 4 + \sqrt{2}$ e $\vec{v} = (a, -a(1 - \sqrt{2}))$
$\lambda_2 = 4 - \sqrt{2}$ e $\vec{v} = (a, -a(1 + \sqrt{2}))$

Fattorizzazione: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 14/5 \end{pmatrix}$

Determinante $= 14$

Inversa: $A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Soluzione: $\vec{x} = (3/14, -1/14)$

2. Siano date le curve: $\gamma_1(t) = \Big(3\sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right), 3 - 3\cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right)\Big)$ per $t \in [0, 1]$, $\gamma_2(t) = \Big(6 - 3t, 6 - 3t\Big)$ per $t \in [1, 2]$. Le si disegni e si calcoli la lunghezza di $\gamma_1 \cup \gamma_2$.
Sia dato il campo vettoriale: $\vec{F} = (F_1, F_2) = \Big(2x + 3e^y, 3xe^y\Big)$. Si dica se ammette potenziale. Si calcoli il suo integrale lungo la curva $\gamma_1 \cup \gamma_2$ di cui sopra. Si valuti infine il rotore del campo $\vec{G} = (F_1, F_2, 0)$.

γ_1 è un quarto di circonferenza congiungente i punti $(0, 0)$ e $(3, 3)$; la sua lunghezza è $3\pi/2$

γ_2 è il segmento congiungente i punti $(3, 3)$ e $(0, 0)$; la sua lunghezza è $3\sqrt{2}$

Lunghezza totale: $3\pi/2 + 3\sqrt{2}$

Potenziale a meno di costante: $P(x, y) = x^2 + 3xe^y$

La curva $\gamma_1 \cup \gamma_2$ è chiusa per cui l'integrale di $\vec{F}$ è nullo in quanto $\vec{F}$ ammette potenziale su tutto il piano (x, y)

Il rotore di $\vec{G}$ è nullo in quanto $\vec{F}$ ammette potenziale

3. Trovare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) + 2z(t) \\ \\ z'(t) = 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

soddisfacente la condizione $y(0) = 0, z(0) = 1$.

La matrice corrispondente $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha autovalori: $\lambda_1 = 2$ con autovettori $(a, 2a)$ e $\lambda_2 = -3$ con autovettori $(b, -b/2)$

Soluzione generale:

$y(t) = ae^{2t} + be^{-3t} \qquad z(t) = 2ae^{2t} - \frac{1}{2}be^{-3t}$

Soluzione soddisfacente le condizioni iniziali:

$y(t) = \frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}e^{-3t} \qquad z(t) = \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t}$

4. Si calcoli l'integrale doppio della funzione $f(x, y) = e^{3y}$ sulla regione: $D = \{0 \leq x \leq 1, \frac{1}{3}(1-x) \leq y \leq \frac{1}{3}(1-x) + 1\}$.

$$\int_D e^{3y} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{3}(1-x)}^{\frac{1}{3}(1-x)+1} e^{3y} dy \right) dx = \frac{1}{3}(1 - e^3 - e + e^4)$$