Compito del 8 - 6 - 2021

1. Data $f :]-2\pi, 2[\to \mathbf{R}$, definita come:

$$f(x) = \sin x, \quad x \in]-2\pi, 0[; \qquad\qquad f(x) = x, \quad x \in [0, 2[$$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare l'immagine di f. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è invertibile.

Si ha: $\inf(f) = \min(f) = -1$ e $\sup(f) = 2$. Il massimo non esiste. La funzione è continua e derivabile su tutto il dominio (in particolare anche per $x = 0$). L'immagine di f consiste nell'insieme $B = [-1, 2[$. Pur assumendo che il codominio sia B, la funzione non risulta essere invertibile, non essendo essa iniettiva (ad esempio: $f(-\pi) = f(0) = 0$).

2. Per $x \geq 0$, disegnare il grafico della funzione f a valori reali, data da:

$$f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} + 1}$$

Determinare l'immagine B di f. Dire se la nuova funzione $f : [0, +\infty[\to B$ risulta essere invertibile.

Si ha $f(0) = 1/2$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Inoltre:

$$f'(x) = -\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\ [e^{\sqrt{x}} + 1]^2}$$

Quindi la derivata di f è sempre negativa per $x \geq 0$. Si conclude che la funzione decresce dal valore $1/2$ fino (asintoticamente) a zero. Dallo studio della derivata seconda ne consegue che f è convessa. L'immagine è il segmento $B =]0, 1/2]$. La f, definita in $[0, +\infty[$ e a valori in B, è invertibile.

3. Rappresentare analiticamente la funzione integrale:

$$G(t) = \int_{-2\pi}^{t} x f(x)\, dx \qquad\qquad t \in [-2\pi, 2]$$

dove f è definita nell'esercizio **1**.

Per $-2\pi \le t \le 0$, si ha:

$$G(t) = \int_{-2\pi}^{t} x \sin x \; dx = -[x \cos x]_{-2\pi}^{t} + \int_{-2\pi}^{t} \cos x \; dx$$
$$= -t \cos t - 2\pi + \sin t$$

In particolare: $G(0) = -2\pi$. Per $0 \le t \le 2$, si ha invece:

$$G(t) = G(0) + \int_{0}^{t} x^2 dx = -2\pi + \frac{t^3}{3}$$

In particolare: $G(2) = -2\pi + \frac{8}{3}$.

4. Trovare tutti i vettori $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ tali per cui:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Fra questi determinare quelli tali per cui $\|v\| = 1$, $\|w\| = 1$. Mostrare infine che ogni vettore di tipo v è ortogonale ad uno di tipo w.

Dal primo sistema si ricava che $v_1 = v_2$, per cui tutti i vettori della forma (α, α), $\alpha \in \mathbf{R}$ sono soluzioni. Dal secondo sistema si ricava che $w_1 = -w_2$, per cui tutti i vettori della forma $(-\beta, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$ sono soluzioni.

Si ha $\|v\| = 1$ quando $2\alpha^2 = 1$, per cui $v = \pm(1/\sqrt{2})(1, 1)$ sono i vettori cercati. Si ha $\|w\| = 1$ quando $2\beta^2 = 1$, per cui $w = \pm(1/\sqrt{2})(-1, 1)$ sono i vettori cercati. Infine, il prodotto scalare tra vettori del tipo (α, α) e vettori del tipo $(-\beta, \beta)$, fornisce $-\alpha\beta + \alpha\beta = 0$, da cui segue l'ortogonalità.