Compito del 9 - 6 - 2015

1. Risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ a-b+c-d=4 \\ a+2b+d=0 \\ a+b-c+2d=-3 \end{cases}$$

La matrice corrispondente si fattorizza nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava facilmente la soluzione: $(a,b,c,d)=(1,0,2,-1)$.

2. Sia data la curva costituita dai due pezzi:

$$\vec{\gamma}_A = (t,\ t^2) \qquad t \in [0,1], \qquad \vec{\gamma}_B = (2-t,\ 2-t) \qquad t \in [1,2].$$

Si calcoli l'integrale lungo $\vec{\gamma}_A \cup \vec{\gamma}_B$ del campo:

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/4}},\ \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/4}} \right).$$

Il campo ammette potenziale $P(x,y) = \frac{2}{3}(x^2+y^2)^{3/4}$. Il lavoro è nullo in quanto la curva è chiusa.

3. Calcolare le derivate prima e seconda della funzione y nel punto $t=0$, dove y risolve il problema differenziale:

$$y'(t) = 2t\ \mathrm{tg}(y(t)), \qquad y(0) = \pi/4.$$

Sostituendo direttamente $t=0$ nell'equazione si ricava $y'(0) = 0$. Successivamente, derivando entrambi i membri dell'equazione si ottiene:

$$y''(t) = 2\ \mathrm{tg}(y(t)) + \frac{2t}{[\cos(y(t))]^2} y'(t).$$

Ponendo $t=0$ e usando la condizione iniziale si ottiene infine:

$$y''(0) = 2\ \mathrm{tg}(y(0)) = 2.$$

4. Calcolare:

$$I = \int_D \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy$$

dove D è il dominio costituito dai punti del cerchio di centro l'origine e raggio pari a 4 che si trovano al di sopra della retta $y = x/2$.

Sia θ_0 l'angolo formato fra la retta $y = x/2$ e l'asse delle ascisse. In coordinate polari il dominio di integrazione è caratterizzato dalle relazioni: $0 \le \rho \le 4$ e $\theta_0 \le \theta \le \theta_0 + \pi$. Pertanto:

$$I = \int_0^4 \int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} \frac{\rho\cos\theta}{1+\rho}\rho d\rho d\theta = \left(\int_0^4 \frac{\rho^2}{1+\rho}d\rho\right)\left(\int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} \cos\theta\ d\theta\right) =$$

$$= 2\sin\theta_0 \int_0^4 \left(\rho - 1 + \frac{1}{1+\rho}\right) d\rho = 2(4+\ln 5)\sin\theta_0.$$