Prova parziale del 10 - 11 - 2021

1. Sia data la funzione $f : A =]-1, \frac{\pi}{2}[\to B$ in modo che:

$f(x) = -(1+x)$ se $x \in]-1, 0[$; $f(0) = -2$; $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ se $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare B in modo che f sia suriettiva. In tal caso dire se f è invertibile, continua, derivabile in A. Calcolare $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Si ha: $\sup(f) = +\infty$, mentre il massimo non esiste. Si ha inoltre $\inf(f) = \min(f) = -2$. La funzione è suriettiva se si sceglie $B = \{-2\} \cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. Per tale scelta del codominio f è invertibile. E' inoltre continua e derivabile in A tranne che per $x = 0$. Il limite per x tendente a zero non esiste.

2. Disegnare il grafico della funzione $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = e^{\mathrm{tg}x}$$

Determinare l'immagine di f. E' possibile prolungare f all'intervallo chiuso $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in modo che la funzione risultante sia continua?

La funzione è sempre positiva. Si ha:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$$

Si ha inoltre:

$$f'(x) = \frac{e^{\mathrm{tg}x}}{(\cos x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^{\mathrm{tg}x}}{(\cos x)^4}(1 + 2\sin x \cos x) = \frac{e^{\mathrm{tg}x}}{(\cos x)^4}(1 + \sin 2x)$$

Avendo che $f' > 0$ e $f'' \geq 0$, si deduce che f è strettamente crescente e convessa. La sua immagine è dunque: $]0, +\infty[$. Se si definisce $f(-\frac{\pi}{2}) = 0$ si ottiene che f è continua in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Tuttavia non è possibile definire f in $\frac{\pi}{2}$ in modo che si mantenga la continuità.