Prova parziale del 3 - 11 - 2022

1. Fissato $n \in \mathbf{N}$, si consideri la funzione $f : A =]0,2[\to \mathbf{R}$ definita come:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ se } x \in]0,1[; \; f(1) = n; \; f(x) = (x-2)^2 \text{ se } x \in]1,2[$$

Per ogni n, trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Stabilire inoltre se f è suriettiva, iniettiva, invertibile, continua in A, derivabile in A. Calcolare infine il limite di $f(x)$ per $x \to 1$.

L'immagine di f è $]0,1[\cup \{n\}$. Se $n = 0$, $\inf(f) = \min(f) = 0$, $\sup(f) = 1$, ma il massimo non esiste. Se $n = 1$, $\sup(f) = \max(f) = 1$, $\inf(f) = 0$, ma il minimo non esiste. Se $n > 1$, $\sup(f) = \max(f) = n$, $\inf(f) = 0$, ma il minimo non esiste.
La funzione non è suriettiva, non è iniettiva, non è invertibile. E' continua e derivabile in $A - \{1\}$. E' continua per $x = 1$ solo se $n = 1$. Non è mai derivabile in $x = 1$. Si ha infine: $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, qualsiasi sia n.

2. Sia $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definita da:

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

Dimostrare che esiste almeno un punto $x_0 > 0$ tale per cui $f(x_0) = 2$.

Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

La funzione è continua in tutti i punti del dominio, per cui assume almeno una volta tutti i valori della semiretta $]\frac{3}{2}, +\infty[$. In particolare, assume anche il valore 2, da cui segue l'esistenza del punto x_0 richiesto.