Prova parziale del 5 - 11 - 2019

1. Sia data la funzione $f : A =]0, 2] \to B$ in modo che:

$f(x) = \sqrt{x}$ se $x \in]0, 1[$; $f(1) = \alpha$; $f(x) = -3x^2 + 6x$ se $x \in]1, 2]$

Trovare B in modo che f sia suriettiva. Al variare di α, dire se f è invertibile, continua, derivabile in A. Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$, $x \to 1$, $x \to 2^-$.

La funzione è suriettiva se $B = [0, 3[\cup \{\alpha\}$. Non è invertibile. E' continua e derivabile in A tranne che per $x = 1$. Si ha: $\sup(f) = \max\{3, \alpha\}$, $\inf(f) = \min(f) = \min\{0, \alpha\}$. Il massimo esiste solo se $\alpha \geq 3$. Il minimo esiste sempre. Inoltre: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, mentre $\lim_{x\to 1} f(x)$ non esiste.

2. Disegnare il grafico della funzione $f : A \to B$, data da:

$$f(x) = \frac{x^2}{2\ln|x| - 1}$$

Determinare l'insieme A in modo che f abbia senso, e trovare B in modo che f sia suriettiva.

Si ha $A = \mathbf{R} - \{\pm\sqrt{e}, 0\}$. Si ha poi che $f > 0$ per $|x| > \sqrt{e}$, e $f < 0$ altrimenti. Si noti che f è pari e:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to\sqrt{e}^-} f(x) = \lim_{x\to-\sqrt{e}^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\sqrt{e}^+} f(x) = \lim_{x\to-\sqrt{e}^-} f(x) = +\infty$$

Inoltre:

$$f'(x) = \frac{4x(\ln|x| - 1)}{(2\ln|x| - 1)^2}$$

La derivata si annulla per $x = \pm e$ (dove f vale e^2), che risultano essere punti dove f assume minimo relativo.

Definendo $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$, la funzione viene ad essere continua e derivabile in $\mathbf{R} - \{\pm\sqrt{e}\}$. In questo modo per $x = 0$ la funzione assume un massimo relativo. Studiando l'immagine di f in tal caso si trova: $B =]-\infty, 0] \cup [e^2, +\infty[$. Non risultano esserci punti di flesso. La funzione è convessa per $|x| > \sqrt{e}$, concava altrimenti.