**Compito del 10 - 1 - 2023**

**1.** Assegnato il parametro reale $\alpha \in [0,1[$, si consideri la funzione $f : [-1,1] \to [-1,1]$ data da:

$$f(x) = x^2 \quad -1 \leq x < 0; \quad f(x) = x - 1 \quad 0 \leq x < 1; \quad f(1) = \alpha$$

Si determinino (quando esistono): $\inf(f)$, $\min(f)$, $\sup(f)$, $\max(f)$. Trovare i valori di $\alpha$ tali per cui $f$ risulta essere invertibile ed in corrispondenza di questi fornire la rappresentazione esplicita di $f^{-1}$.

---

Si ha: $\inf(f)$=$\min(f)$=$-1$, $\sup(f)$=$\max(f)$=1. Se $\alpha \in ]0,1[$ la funzione non è suriettiva in quanto $0 \notin \mathrm{Im}(f)$. Non è neanche iniettiva in quanto $f(-\sqrt{\alpha}) = f(1)$. La funzione è invertibile se e solo se $\alpha = 0$. In tal caso si ottiene:

$$f^{-1}(y) = y + 1 \quad -1 \leq y \leq 0; \qquad f^{-1}(y) = -\sqrt{y} \qquad 0 < y \leq 1.$$

**2.** Determinare l'immagine della funzione $f : \mathbf{R} - \{-3\} \to \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = \frac{e^x}{x+3}$$

---

Si ha:

$$f'(x) = (x+2)\frac{e^x}{(x+3)^2} \qquad f''(x) = (x^2 + 4x + 5)\frac{e^x}{(x+3)^3}$$

Ne risulta che $f$ è negativa, decrescente e concava per $x < -3$, positiva, decrescente e convessa se $-3 < x < -2$, positiva, crescente e convessa se $x > -2$. C'è quindi un minimo relativo per $x = -2$ dove la funzione vale $1/e^2$. L'immagine di $f$ risulta dunque essere $]-\infty, 0[ \cup [1/e^2, +\infty[$.

**3.** Calcolare per $t \in [-1,1]$:

$$G(t) = \int_{-1}^{t} f(x)\, dx$$

dove $f$ è definita nell'esercizio **1**. Studiare la continuità e la derivabilità di $G$.

---

Si ricava:

$$G(t) = \int_{-1}^{t} x^2\, dx = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{3} \qquad -1 \leq t \leq 0$$

$$G(t) = G(0) + \int_0^t (x-1)\,dx = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{3} \qquad 0 \le t \le 1$$

La funzione è continua in tutti i punti dell'intervallo $[-1, 1]$. E' derivabile infinite volte tranne che nel punto $t = 0$, dove si ha:

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{G(t) - G(0)}{t} = 0 \qquad \lim_{t \to 0^+} \frac{G(t) - G(0)}{t} = -1$$

per cui non è derivabile neppure una volta.

**4.** Mediante eliminazione Gaussiana, risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} 4x + y - z = 2 \\ x + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Trovare poi il valore di $\alpha$ in modo che il vettore $(2, 1, \alpha)$ sia ortogonale a $(x, y, z)$.

---

In forma triangolare il sistema diviene:

$$\begin{cases} 4x + y - z = 3 \\ \\ -\frac{1}{4}y + \frac{5}{4}z = \frac{3}{2} \\ \\ 5z = 5 \end{cases}$$

da cui $(x, y, z) = (1, -1, 1)$. Successivamente si ricava $\alpha = -1$.