Compito del 11 - 1 - 2023

1. Calcolare gli autovalori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e mostrare che essa non è invertibile.

Si ha: $\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$, da cui si ottengono gli autovalori: $0, -1, 2$. Il determinante di A è nullo in quanto è il prodotto degli autovalori. Dunque A non è invertibile.

2. Sia $\vec{F}(x, y, z) = \Big(2xy - z,\, x^2,\, x\Big)$. Calcolare il lavoro lungo ciascuna delle due curve:

$$\vec{\gamma}_A(t) = (\cos t,\, \sin t,\, 0) \qquad\qquad \vec{\gamma}_B(t) = (\cos t,\, 0,\, \sin t)$$

con $t \in [0, 2\pi]$.

Si ha:

$$\mathcal{L}_A = \int_0^{2\pi} \Big[-2\cos t(\sin t)^2 + (\cos t)^3 \Big] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [1 - 3(\sin t)^2] \cos t \, dt = \Big[\sin t - (\sin t)^3 \Big]_0^{2\pi} = 0$$

$$\mathcal{L}_B = \int_0^{2\pi} [(\sin t)^2 + (\cos t)^2] dt = 2\pi.$$

3. Risolvere il sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{y(t)} \\ z'(t) = -y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

con $y(0) = 1$ e $z(0) = 0$.

La prima equazione ammette la soluzione $y(t) = (t + 1)^2$. La seconda diventa un'equazione lineare non omogenea: $z'(t) = 2z(t) - (t + 1)^2$, che ha come soluzione generale:

$$z(t) = ce^{2t} + \frac{1}{2}\left(t^2 + 3t + \frac{5}{2}\right)$$

Imponendo la costrizione $z(0) = 0$ si ricava $c = -5/4$.

4. Calcolare:

$$I = \int_D y \, dxdy$$

dove:

$$D = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\} \cup \{1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}\}$$

Si ha:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x y \, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} \, dx + \int_1^2 \frac{2x - x^2}{2} \, dx = \frac{1}{2}$$