Compito del 24 - 1 - 2023

1. Dato $n \in \{0,1,2\}$, si consideri la funzione $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$, definita da:

$$f(x) = \cos x \quad x \neq 0; \qquad f(0) = n.$$

Si determinino (quando esistono): $\inf(f)$, $\min(f)$, $\sup(f)$, $\max(f)$. Discutere l'invertibilità, la continuità e la derivabilità di f, al variare di n.

Se $n = 0$: $\inf(f)$=0, $\min(f)$=0, $\sup(f)$=1, $\max(f)$ non esiste.
Se $n = 1$: $\inf(f)$=0, $\min(f)$ non esiste, $\sup(f)$=1, $\max(f)$=1.
Se $n = 2$: $\inf(f)$=0, $\min(f)$ non esiste, $\sup(f)$=2, $\max(f)$=2.
La funzione non è suriettiva, non è iniettiva, non è invertibile. E' continua e derivabile in $]-\pi/2, \pi/2[-\{0\}$. Per $x = 0$ è continua e derivabile solo quando $n = 1$.

2. Mostrare che la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = e^{2x} - e^{-3x}$$

è invertibile. Determinare i suoi punti di flesso.

Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 3e^{-3x} \qquad f''(x) = 4e^{2x} - 9e^{-3x}$$

per cui f è strettamente crescente e, essendo continua, ha come immagine tutto $\mathbf{R}$. Pertanto è invertibile. Si ha infine: $f''(x) = 0 \iff x = \frac{1}{5}\ln(\frac{9}{4})$.

3. Calcolare il limite per $n \to +\infty$ della successione:

$$a_n = \int_0^1 \Big[\ln(x+1) + x^n\Big] dx \qquad n \in \mathbf{N}$$

Si ricava:

$$a_n = \left[(x+1)\ln(x+1) - x + \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{n+1}$$

da cui: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2\ln 2 - 1$.

4. Risolvere il sistema lineare $A^2\vec{x} = \vec{b}$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix} \qquad\qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2i \end{pmatrix}$$

In maniera esplicita si ricava:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3i \\ -3i & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2i \end{pmatrix}$$

ottenendo infine: $\vec{x} = (-1, i)$.