Compito del 14 - 2 - 2023

1. Fissato $n \in \mathbf{N}$, con $n \geq 1$, si consideri la funzione $f : [-1, 2[\to B$, definita da:

$$f(x) = \frac{x}{n} \ .$$

Si individui B in modo che corrisponda all'immagine di f. Determinare: $\inf(f)$, $\min(f)$, $\sup(f)$, $\max(f)$. Discutere l'invertibilità, la continuità e la derivabilità di f, al variare di n. Trovare l'espressione della funzione inversa.

Si ricava $B = [-\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$, e da ciò si deduce che: $\inf(f)$=$\min(f)$=$-1/n$, $\sup(f)$=$2/n$, mentre $\max(f)$ non esiste. La funzione è continua e derivabile in tutti i punti. E' invertibile e si ha che $f^{-1} : [-\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\to [-1, 2[$ è data da $f^{-1}(y) = ny$.

2. Sia $f :]0, \pi[\to \mathbf{R}$, definita come:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin x} \ .$$

Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad \lim_{x\to \pi} f(x) \qquad \lim_{x\to 0} f'(x) \qquad \lim_{x\to \pi} f'(x).$$

Si ha:

$$f'(x) = \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x}{\sin x}\left(2 - \frac{x}{\mathrm{tg} x}\right)$$

per cui:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \ x\frac{x}{\sin x} = 0 \qquad \lim_{x\to \pi} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 1 \qquad \lim_{x\to \pi} f'(x) = +\infty$$

3. Esplicitare $G : [-1, 2] \to \mathbf{R}$ definita da:

$$G(t) = \int_0^t f(x) \ dx$$

dove f è definita nell'esercizio **1**. Calcolare poi il limite per $n \to +\infty$ della successione $a_n = G(\sin n)$.

Si ricava:

$$G(t) = \frac{t^2}{2n} \qquad \forall t \in [-1, 2]$$

Dunque:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin^2 n}{2n} = 0.$$

4. Mediante eliminazione Gaussiana, mostrare che il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non ammette soluzione.

In forma triangolare il sistema diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

L'ultima equazione è impossibile, dovendosi avere: $0 \cdot x_3 = 8$.