Compito del 15 - 2 - 2023

1. Calcolare autovalori ed autovettori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e del suo quadrato A^2.

Per quanto riguarda A si hanno gli autovalori complessi e coniugati: $\lambda_1 = 3 + i$ e $\lambda_2 = 3 - i$. I corrispettivi autovettori sono: $a(1, -i)$, $b(1, i)$, con a e b numeri complessi arbitrari. La matrice A^2 ha autovalori $\lambda_1^2 = (3 + i)^2 = 8 + 6i$ e $\lambda_2^2 = (3 - i)^2 = 8 - 6i$. Gli autovettori sono gli stessi di A.

2. Siano dati il campo:

$$\vec{F}(x, y, z) = \Big(2x \sin(xz + y) + x^2 z \cos(xz + y),$$

$$x^2 \cos(xz + y),\ x^3 \cos(xz + y)\Big)$$

e le due curve:

$$\vec{\gamma}_1(t) = (t,\ t,\ t) \qquad \vec{\gamma}_2(t) = (t,\ t^2,\ t), \qquad t \in [0, 1]$$

Seguendo quale di esse si compie maggior lavoro?

Il campo ammette potenziale $P(x, y, z) = x^2 \sin(xz + y)$. Entrambe le curve hanno come punto iniziale $A = (0, 0, 0)$ e punto finale $B = (1, 1, 1)$. Il lavoro lungo esse è il medesimo e vale: $P(B) - P(A) = \sin 2$.

3. Per $t \geq 0$, trovare la soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'(t) = \frac{t}{y(t) + 4}$$

con la condizione $y(0) = 2$.

L'equazione è a variabili separabili e si ha:

$$\int y'(t)(y(t) + 4)dt = \int t\, dt + c = \tfrac{1}{2}t^2 + c$$

dove c è una costante arbitraria. Successivamente si ricava:

$$\tfrac{1}{2}y^2(t) + 4y(t) = \tfrac{1}{2}t^2 + c \quad \Rightarrow \quad y^2(t) + 8y(t) - (t^2 + 2c) = 0$$

Sfruttando la condizione iniziale si ottiene $c = 10$. Si risolve infine l'equazione di secondo grado, ricavando:

$$y(t) = -4 \pm \sqrt{t^2 + 36}$$

Affinché $y(0)$ valga 2, l'unica soluzione accettabile delle due proposte è quella con il segno $+$.

4. Sia data la funzione: $f(x, y) = 1 - \sin(x^2 + y^2)$, definita su $D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ \ y > 0\}$. Si calcoli $\int_D f(x, y)dxdy$ e si trovino i punti di D in cui si annulla il gradiente $\vec{\nabla} f$.

In coordinate polari il dominio di definizione diventa:

$$E = \{1 \leq \rho \leq 2,\ 0 < \theta < \pi\}$$

Pertanto:

$$\int_D f(x, y)dxdy = \int_E (1 - \sin\rho^2)\rho\ d\rho d\theta = \pi \int_1^2 (1 - \sin\rho^2)\rho\ d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[\rho^2 + \cos\rho^2\Big]_1^2 = \frac{\pi}{2}(3 + \cos 4 - \cos 1).$$

Per quanto riguarda il gradiente, si ha:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \Big(-2x\cos(x^2 + y^2),\ -2y\cos(x^2 + y^2)\Big)$$

In D questo si annulla quando $x^2 + y^2 = \pi/2$. Quindi $\vec{\nabla} f = (0, 0)$ in tutti i punti della semicirconferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{\pi/2}$, con $y > 0$.