Compito del 25 - 1 - 2023

1. Determinare la fattorizzazione LU della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e utilizzarla per dimostrare che il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, con $\vec{b} = (-3, 2, 1)$, non ammette soluzione.

Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partendo da $A\vec{x} = L(U\vec{x}) = L\vec{y}$, si risolve $L\vec{y} = \vec{b}$, ottenendo $\vec{y} = (-3, 3, 8)$. Nella risoluzione di $U\vec{x} = \vec{y}$ si ha $0 \cdot x_3 = 8$, che è impossibile.

2. Sia $\vec{F}(x, y, z) = \big(z, y^3, -x\big)$. Calcolare la lunghezza ℓ della curva

$$\vec{\gamma}(t) = (\cos t,\ t, \sin t) \qquad t \in [0, 4\pi].$$

e il relativo lavoro $\mathcal{L}$.

Dato che $\vec{\gamma}\,'(t) = (-\sin t,\ 1, \cos t)$, si ha:

$$\ell = \int_0^{4\pi} \sqrt{2}\, dt = 4\sqrt{2}\,\pi$$

$$\mathcal{L} = \int_0^{4\pi} [-(\sin t)^2 + t^3 - (\cos t)^2] dt = \left[\frac{t^4}{4} - t\right]_0^{4\pi} = 64\pi^4 - 4\pi.$$

3. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 10\, e^{3t}$$

Il polinomio caratteristico $\lambda^2 + \lambda - 2$ ha come radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. D'altronde, cercando una soluzione particolare del tipo αe^{3t}, si ottiene $\alpha = 1$, e quindi:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + e^{3t}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie, è la soluzione generale.

4. Calcolare:

$$I = \int_D y \, dxdy$$

dove:

$$D = \{y \geq |x|, \; x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Il calcolo si esegue facilmente in coordinate polari:

$$I = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^2 \rho \sin\theta \, \rho d\rho \right) d\theta = \frac{8}{3}\sqrt{2} \, .$$