Compito del 8 - 1 - 2026

1. Calcolare gli autovalori e il determinante della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mediante fattorizzazione LU risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ dove $\vec{b} = (6, 3, 3)$.

Gli autovalori sono: $-2, 0, 3$. Ne consegue che il determinante è nullo. La matrice si fattorizza come segue:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo $L\vec{y} = \vec{b}$ si ricava $\vec{y} = (6, 3, 0)$. Risolvendo $U\vec{x} = \vec{y}$ si ricavano infinite soluzioni del tipo $\vec{x} = (2, 3 - \gamma, \gamma)$ con $\gamma \in \mathbf{R}$.

2. Dato il parametro $\alpha \geq 1$, si consideri la curva:

$$\vec{\gamma}(t) = (t, t^\alpha) \qquad t \in [0, 1]$$

Si calcoli il lavoro $\mathcal{L}$ lungo $\vec{\gamma}$ relativamente al campo:

$$\vec{F}(x, y) = \left(y^2,\ x\right)$$

Il campo non ammette potenziale. Si ha $\vec{\gamma}'(t) = (1, \alpha t^{\alpha-1})$, per cui:

$$\mathcal{L} = \int_0^1 (t^{2\alpha} + \alpha t^\alpha) dt = \left[\frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} + \alpha \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+1}$$

3. Trovare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

soddisfacente $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 1, 0)$.

Si può disaccoppiare l'incognita y dalle altre, ottenendo: $y(t) = e^{-3t}$. Rimane il sistema omogeneo:

$$x'(t) = -2x(t) + 3z(t) \qquad z'(t) = x(t) - 4z(t)$$

con $x(0) = 0$ e $z(0) = 0$. E' evidente che quest'ultimo ha come uniche soluzioni: $x(t) = 0$, $z(t) = 0$, $\forall t$.

4. Sia D l'insieme ottenuto sottraendo dal cerchio di centro l'origine e raggio 3 il quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Calcolare:

$$I = \int_D (x + 1)\ dxdy$$

Data la simmetria di D e l'asimmetria della funzione $f(x, y) = x$, si ricava:

$$\int_D x\ dxdy = 0$$

per cui:

$$I = \int_D 1\ dxdy = \text{Area}(D) = 9\pi - 4$$