Prova parziale del 6 - 11 - 2026

1. Sia data la funzione $f : A =]-1, 1[\to B$ (con $B \subset \mathbf{R}$) in modo che:

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad \text{se } x \in]-1, 0[; \qquad f(x) = \sin x \quad \text{se } x \in [0, 1[$$

Trovare l'immagine di f e dedurre (se esistono) le quantità: $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Posto che B sia l'immagine di f, dire se la funzione è invertibile. Nel caso lo sia, calcolare esplicitamente f^{-1} e dire se quest'ultima è continua e/o derivabile.

L'immagine è l'insieme $I =]-\infty, \sin 1[$, per cui $\sup(f)=\sin 1$, $\inf(f)= -\infty$, mentre $\max(f)$ e $\min(f)$ non esistono. La funzione è strettamente crescente, continua e derivabile in tutto A. In particolare:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \qquad f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Se $B = I$ si ha l'invertibilità e $f^{-1} : B \to A$ è data da:

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y} \quad \text{se } y \in]-\infty, 0[; \quad f^{-1}(y) = \arcsin y \quad \text{se } y \in [0, \sin 1[$$

Quest'ultima funzione è continua e derivabile in tutto B. In particolare:

$$\lim_{y\to 0} f^{-1}(y) = 0 = f^{-1}(0) \qquad \frac{df^{-1}}{dy}(0) = \lim_{y\to 0} \frac{f^{-1}(y)}{y} = 1$$

2. Disegnare il grafico della funzione $f : A =]0, \pi[\to \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos x}$$

Determinare l'immagine di f e la retta tangente al grafico per $x = \pi/2$. E' vero che per $x \in A$ il grafico di tale retta sta sempre al di sotto di quello di f?

Si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} \qquad\qquad \lim_{x\to \pi} f(x) = +\infty$$

La funzione non è limitata superiormente. E' continua e derivabile infinite volte ovunque in A. Inoltre:

$$f'(x) = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} > 0$$

$$f''(x) = \frac{1+\cos x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^3} = \frac{1}{(1+\cos x)^2} + \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^3} > 0$$

Dunque f' e f'' sono strettamente positive. L'immagine di f risulta essere $]1/2, +\infty[$. Essendo f definita su un intervallo, essa risulta essere strettamente crescente e strettamente convessa. Per tale ragione il grafico di f si trova sempre al di sopra di qualunque retta tangente ad esso. In particolare, dato che $f'(\pi/2) = 1$, la retta tangente nel punto $(\pi/2, 1)$ è data da:

$$r(x) = x + 1 - \frac{\pi}{2}$$